64. ročník Matematickej olympiády
2014/2015 *Riešenia úloh celoštátneho kola kategórie A*

---

1. *Nájdite všetky štvorciferné čísla n také, že súčasne platí:*
i) číslo n je súčinom troch rôznych prvočísel;
ii) súčet najmenších dvoch z týchto prvočísel je rovný rozdielu najväčších dvoch z nich;
iii) súčet všetkých troch prvočísel je rovný druhej mocnine iného prvočísla.
(*Radek Horenský*)

Riešenie. Predpokladajme, že n spĺňa zadané podmienky, teda $n = p \cdot q \cdot r$, pričom $p < q < r$ sú prvočísla.

Z druhej podmienky vyplýva $p + q = r - q$, t. j. $r = p + 2q$. Prvočíslo r je nepárne, preto je $p \neq 2$.

Podľa tretej podmienky je $p + q + r = 2p + 3q = s^2$, kde s je prvočíslo. Možnosť $s = 3$ očividne nevyhovuje (súčet troch rôznych prvočísel je totiž väčší ako 9), preto s^2 nie je deliteľné tromi, a teda $p \neq 3$.

Z rovnosti $2p + 3q = s^2$ tiež vyplýva, že číslo $2p$ dáva po delení tromi zvyšok 1, pretože či už dáva s po delení tromi zvyšok 1 alebo 2, v oboch prípadoch dáva s^2 po delení tromi zvyšok 1. Prvočíslo p teda dáva po delení tromi zvyšok 2. Vypíšme od najmenších niekoľko prvočísel, ktoré sme zatiaľ nevylúčili ako možné hodnoty p:

$$p \in \{5, 11, 17, 23, 29, 41, \dots\}.$$

Ak je $p \geqq 17$, tak $q \geqq 19$ a $r = p + 2q \geqq 55$, čiže

$$n = pqr \geqq 17 \cdot 19 \cdot 55 > 15 \cdot 15 \cdot 50 = 225 \cdot 50 > 200 \cdot 50 = 10\,000,$$

čo je v rozpore s predpokladom, že n je štvorciferné.[1] Ostáva teda vyšetriť $p \in \{5, 11\}$.

Ak $p = 11$, z rovnosti $2p + 3q = s^2$ máme $q = \frac{1}{3}(s^2 - 22)$. Nasledujúca tabuľka udáva hodnoty q pre najmenšie prvočíselné hodnoty s (s výnimkou prípadov $s < 5$, keď vyjde $q < 0$):

s	5	7	11	13	17	19	...
q	1	9	33	49	89	113	...

Zrejme pre rastúce s budú hodnoty q rásť. Vidíme, že pre $s \leqq 13$ nevychádza q prvočíslo. Pre hodnoty $s \geqq 17$ je $q > 50$, takže

$$n = pqr = 11q(11 + 2q) > 11 \cdot 50 \cdot 111 > 10 \cdot 50 \cdot 100 = 50\,000.$$

Štvorciferné hodnoty n teda pre $p = 11$ nedostaneme.

Ak $p = 5$ máme $q = \frac{1}{3}(s^2 - 10)$. Zostrojíme podobnú tabuľku ako vyššie:

s	5	7	11	13	17	19	...
q	5	13	37	53	93	117	...

[1] Mohli sme samozrejme priamo napísať $n = pqr \geqq 17 \cdot 19 \cdot 55 = 17\,765$. Uvedený výpočet len demonštruje, ako postačujúci odhad $n \geqq 10\,000$ odvodiť bez prácneho násobenia.

Prípad $q = 5$ nevyhovuje podmienke $p < q$. Pre $q = 13$ vyjde $r = 31$, dostávame teda vyhovujúcu hodnotu $n = 5 \cdot 13 \cdot 31 = 2\,015$ (13 aj 31 sú skutočne prvočísla). Pre $s \geqq 11$ je $q \geqq 37$, čiže

$$n = pqr = 5q(5 + 2q) \geqq 5 \cdot 37 \cdot 79 > 5 \cdot 30 \cdot 70 = 10\,500.$$

Žiadne ďalšie riešenia preto nedostaneme.

Odpoveď. Jediným možným riešením je $p = 5$, $q = 13$ a $r = 31$, t. j. $n = 2\,015$.

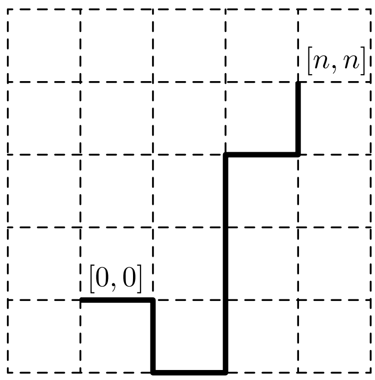
Poznámka. Pre zaujímavosť poznamenajme, že jediné 5-ciferné, resp. 6-ciferné číslo vyhovujúce zadaným trom podmienkam je $n = 5 \cdot 37 \cdot 79 = 14\,615$, resp. $29 \cdot 37 \cdot 103 = 110\,519$. Ak by s nemuselo byť prvočíslo, jediné ďalšie vyhovujúce číslo menšie ako $1\,000\,000$ by bolo $n = 3 \cdot 73 \cdot 149 = 32\,631$.

---

2. *Pre dané prirodzené číslo n určte počet ciest dĺžky $2n + 2$ z bodu $[0, 0]$ do bodu $[n, n]$, ktoré žiadnym bodom neprechádzajú viackrát. Cestou dĺžky $2n + 2$ z bodu $[0, 0]$ do bodu $[n, n]$ rozumieme $(2n + 2)$-člennú postupnosť*

$$(A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_{2n+1}A_{2n+2})$$

úsečiek spájajúcich dva susedné mrežové body, pričom $A_0 = [0, 0]$, $A_{2n+2} = [n, n]$.



Obr. 1

(*Pavel Novotný*)

Riešenie. Súradnicovú sústavu majme orientovanú štandardne, teda tak, že x-ová os smeruje zľava doprava a y-ová zdola nahor. V tomto kontexte budeme v riešení pre príslušné smery používať slová „doľava“, „doprava“, „nahor“ a „nadol“.

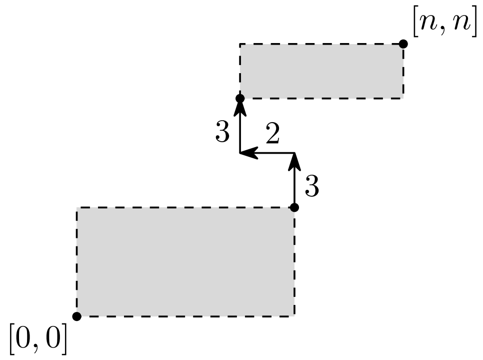
Každá cesta z bodu $[0, 0]$ do bodu $[n, n]$ musí obsahovať aspoň n krokov smerom doprava a aspoň n krokov nahor. Okrem týchto $2n$ krokov musí cesta dĺžky $2n + 2$ obsahovať ešte dva kroky, ktoré majú navzájom opačný smer. Vzhľadom na to sa každá cesta dĺžky $2n + 2$ dá realizovať práve jedným z dvoch spôsobov:

a) $n + 1$ krokov doprava, jeden krok doľava, n krokov nahor;
b) $n + 1$ krokov nahor, jeden krok nadol, n krokov doprava.

Vzhľadom na symetriu je zrejmé, že obe možnosti obsahujú rovnaký počet ciest, preto sa budeme zaoberať len možnosťou a). Krok doprava označíme cifrou 1, krok doľava cifrou 2, krok nahor cifrou 3. Hľadáme počet $(2n + 2)$-členných postupností, ktoré obsahujú $n+1$ jednotiek, jednu dvojku a n trojok. Jednotky môžeme umiestniť $\binom{2n+2}{n+1}$ spôsobmi a dvojku na niektoré z $(n+1)$ zvyšných miest, preto počet takých postupností je

$$(n+1)\binom{2n+2}{n+1}.$$

Musíme ale odrátať tie postupnosti, v ktorých nasleduje dvojka bezprostredne za jednotkou alebo bezprostredne pred jednotkou – práve tieto postupnosti totiž prislúchajú takým cestám, na ktorých po niektorej úsečke prejdeme aspoň dvakrát. Naozaj, ak jednotka v postupnosti susedí s dvojkou, znamená to, že sme na ceste išli v dvoch po sebe idúcich krokoch doprava a doľava (alebo naopak), teda sme prešli po tej istej úsečke dvakrát. Naopak, ak dvojka (ktorá je v postupnosti jediná) nesusedí s jednotkou, je v postupnosti pred ňou aj za ňou trojka (prípadne z niektorej strany nie je žiadna cifra, ak dvojkou postupnosť začína alebo končí), takže celá časť cesty pred krokom doľava sa nachádza nižšie a celá časť cesty po kroku doľava sa nachádza vyššie ako úsečka, po ktorej sme prešli doľava (obr. 2). Tieto dve časti sú preto disjunktné a keďže obe už obsahujú len kroky nahor a doprava, po žiadnej úsečke v nich viac ako raz určite neprejdeme.



Obr. 2

Jednotku a hneď za ňou dvojku môžeme umiestniť $(2n+1)$ spôsobmi a zvyšné jednotky na voľné miesta $\binom{2n}{n}$ spôsobmi. Počet postupností, v ktorých je dvojka bezprostredne za jednotkou, je teda

$$(2n+1)\binom{2n}{n}.$$

Taký istý je počet postupností, v ktorých je dvojka bezprostredne pred jednotkou. Postupnosti, v ktorých je trojica po sebe idúcich členov $1, 2, 1$ (tie prislúchajú cestám, na ktorých po niektorej úsečke prejdeme trikrát po sebe) sú zarátané v oboch prípadoch, musíme ich teda raz odčítať. Ich počet je $2n\binom{2n-1}{n-1}$.

Počet vhodných ciest typu a) je teda

$$\begin{aligned}
&(n+1)\binom{2n+2}{n+1} - 2(2n+1)\binom{2n}{n} + 2n\binom{2n-1}{n-1} = \\
&= \frac{(n+1)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} - \frac{2(2n+1)(2n)!}{n!\cdot n!} + 2n\binom{2n-1}{n-1} = \\
&= \frac{(2n+2)!}{n!(n+1)!} - \frac{(2n+2)!}{n!(n+1)!} + 2n\binom{2n-1}{n-1} = 2n\binom{2n-1}{n-1}
\end{aligned}$$

a počet všetkých ciest je $4n\binom{2n-1}{n-1}$.

Iné riešenie. Pri označení z prvého riešenia prípustnej ceste typu a) prislúcha postupnosť, v ktorej nie sú vedľa seba jednotka a dvojka. To znamená, že postupnosť alebo obsahuje blok 323 alebo začína blokom 23 alebo končí blokom 32. Odstránením bloku 323 vznikne $(2n-1)$-členná postupnosť obsahujúca $n+1$ jednotiek a $n-2$ trojok. Počet takých postupností je $\binom{2n-1}{n+1}$ a blok 323 môžeme pridať ku každej $2n$ spôsobmi. Odstránením začiatočného bloku 23 alebo koncového bloku 32 vznikne $2n$-členná postupnosť obsahujúca $n+1$ jednotiek a $n-1$ trojok. Počet takých postupností je $\binom{2n}{n+1}$ a ku každej môžeme pridať na začiatok blok 23 alebo na koniec blok 32.

Počet ciest typu a) je preto

$$
\begin{aligned}
2n\cdot\binom{2n-1}{n+1}+2\cdot\binom{2n}{n+1} &= \frac{2n(2n-1)!}{(n+1)!(n-2)!}+\frac{2\cdot(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \\
&= \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-2)!}\left(1+\frac{2}{n-1}\right) = \frac{(2n)!}{(n+1)n!(n-2)!}\cdot\frac{n+1}{n-1} = \\
&= \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} = \frac{(2n)!\cdot n}{n!\cdot n!} = n\binom{2n}{n}.
\end{aligned}
$$

Počet všetkých ciest je teda $2n\cdot\binom{2n}{n}$.

Poznámky. Pri druhom postupe treba osobitne preveriť prípad $n=1$, keďže vtedy nie všetky kombinačné čísla a úpravy vyššie dávajú zmysel.

Záverečný vzorec možno dostať (v závislosti od použitých úprav) v rôznych tvaroch, tu sme uviedli len dva z nich.

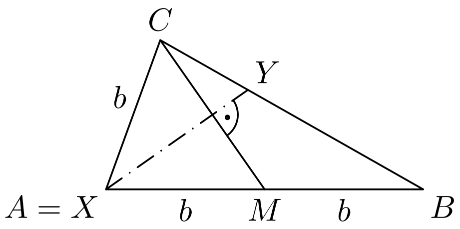
---

3. *V ľubovoľnom trojuholníku ABC, v ktorom ťažnica z vrcholu C nie je kolmá na stranu CA ani na stranu CB, označme X a Y priesečníky osi tejto ťažnice s priamkami CA a CB. Nájdite všetky také trojuholníky ABC, pre ktoré body A, B, X, Y ležia na jednej kružnici.* (Ján Mazák)

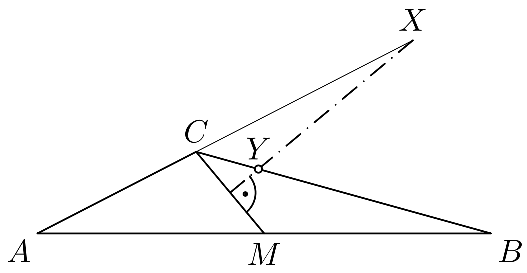
Riešenie. Pre veľkosti strán a uhlov trojuholníka ABC budeme používať štandardné označenie. Ďalej označme M stred strany AB. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $|AC| \leqq |BC|$. V takom prípade je bod Y vnútorným bodom strany BC. Uvažujme postupne všetky možné polohy bodu X vzhľadom na body A, C na priamke AC.

Zrejme $X \neq C$. Ak $X = A$, tak body A, B, X, Y sú len trojicou rôznych bodov a určite ležia na jednej kružnici (očividne totiž neležia na jednej priamke). Trojuholník ABC preto v tomto prípade vyhovuje zadaniu. Os ťažnice CM prechádza bodom A práve vtedy, keď $|AC| = |AM|$. Teda medzi hľadané trojuholníky patria všetky trojuholníky, v ktorých $c = 2b$ (obr. 3).[2]

[2] Vďaka trojuholníkovej nerovnosti $a+b>c$ pre každý trojuholník spĺňajúci $c=2b$ platí $a>b$, takže všetky takéto trojuholníky patria do uvažovaného prípadu $|AC| \leqq |BC|$.



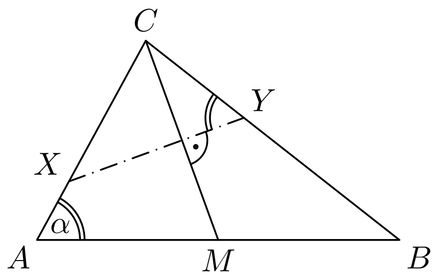
Obr. 3



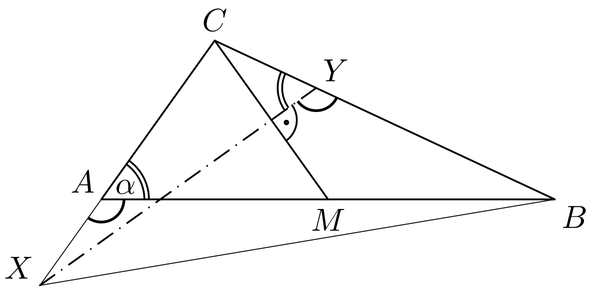
Obr. 4

Ak X leží na polpriamke opačnej k polpriamke CA (to sa stane práve vtedy, keď je uhol ACS tupý, obr. 4), tak bod Y leží vnútri trojuholníka ABX, takže určite neleží na kružnici opísanej tomuto trojuholníku. Žiadny trojuholník ABC s takouto polohou bodu X teda nevyhovuje zadaniu.

Ak X leží vnútri strany AC (obr. 5a), ležia zadané body na jednej kružnici práve vtedy, keď je štvoruholník $ABYX$ tetivový, t. j. keď $\alpha + |\measuredangle XYB| = 180°$, čo platí práve vtedy, keď $|\measuredangle XYC| = \alpha$. Rovnakú podmienku dostaneme aj v prípade, že X je vnútorným bodom polpriamky opačnej k polpriamke AC (obr. 5b), pretože v takom prípade je tetivovosť štvoruholníka $XBYA$ ekvivalentná so zhodnosťou obvodových uhlov XYB a XAB, ktorých veľkosti sú $180° - |\measuredangle XYC|$ a $180° - \alpha$.

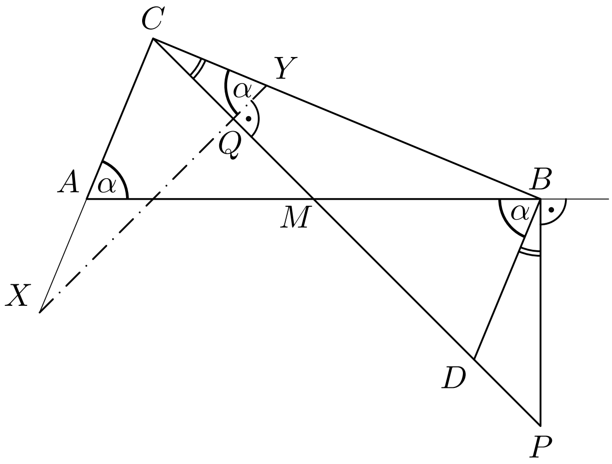


Obr. 5a



Obr. 5b

Pre vyriešenie úlohy teda potrebujeme nájsť také trojuholníky, pri ktorých X leží na polpriamke CA a uhol XYC má veľkosť α. V prípade, že trojuholník ABC je rovnoramenný so základňou AB, je $\beta = \alpha$ a priamka XY je zrejme rovnobežná s AB, zo súhlasných uhlov preto $|\measuredangle XYC| = \alpha$ a trojuholník vyhovuje zadaniu (bod X vtedy leží vnútri strany AC). Uvažujme ďalej len prípad $|AC| < |BC|$. Vtedy polpriamka CM pretne kolmicu na stranu AB vedenú bodom B v bode, ktorý označíme P. Nech Q je stred ťažnice CM a D je obraz bodu C v stredovej súmernosti podľa M.



Obr. 6

Predpokladajme, že $X \in \overrightarrow{CA}$ a $|\measuredangle XYC| = \alpha$. Z pravouhlého trojuholníka CQY máme $\alpha < 90°$ a $|\measuredangle BCP| = 90° - \alpha$. Zo stredovej súmernosti so stredom M vyplýva $|\measuredangle DBA| = |\measuredangle CAB| = \alpha$, takže D leží vnútri úsečky MP (obr. 6) a $|\measuredangle DBP| = 90° - \alpha$. Trojuholníky DBP a BCP sú teda podobné podľa vety *uu*, z čoho dostávame

$$|DP| : |BP| = |BP| : |CP|, \qquad \text{t. j.} \qquad |DP| \cdot |CP| = |BP|^2. \tag{1}$$

(Alternatívne možno na odvodenie tejto rovnosti namiesto podobnosti použiť argument s úsekovým a obvodovým uhlom a mocnosťou bodu P ku kružnici opísanej trojuholníku CDB.) Podľa Pytagorovej vety je $|BP|^2 = |PM|^2 - |MB|^2$. Na druhej strane máme $|DP| \cdot |CP| = (|PM| - |DM|)(|PM| + |MC|) = |PM|^2 - |MC|^2$. Dosadením do (1) dostaneme po úprave $|MB| = |MC|$. Preto kružnica s priemerom AB prechádza bodom C, takže trojuholník ABC má pri vrchole C pravý uhol.

Naopak, ak trojuholník ABC má pravý uhol pri vrchole C, tak C leží na Tálesovej kružnici so stredom M a polomerom MB, takže trojuholník BCM je rovnoramenný so základňou BC a $|\measuredangle BCM| = |\measuredangle CBM| = 90° - \alpha$, odkiaľ $|\measuredangle XYC| = \alpha$. Keďže uhol ACM je ostrý, leží X na polpriamke CA, a z uvedeného vyplýva, že trojuholník ABC vyhovuje zadaniu.

Záver. Zhrnutím uvedených výsledkov a pridaním riešení prislúchajúcich k prípadu $|AC| > |BC|$ dostávame, že zadaniu vyhovujú:

- všetky rovnoramenné trojuholníky so základňou AB;
- všetky pravouhlé trojuholníky s preponou AB;
- všetky trojuholníky, v ktorých strana AB je dvakrát väčšia ako jedna zo zvyšných dvoch strán.

(Pravouhlý rovnoramenný trojuholník so základňou AB je zahrnutý v prvom aj druhom bode; pravouhlý trojuholník s preponou AB a s uhlom $\alpha = 60°$ alebo $\beta = 60°$ je zahrnutý v druhom aj treťom bode.)

Pomocou dĺžok strán možno tieto trojuholníky charakterizovať symbolicky podmienkou

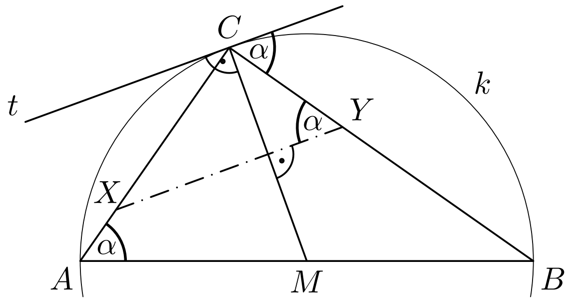
$$a = b \quad \vee \quad a^2 + b^2 = c^2 \quad \vee \quad c = 2a \quad \vee \quad c = 2b,$$

prípadne pomocou veľkostí vnútorných uhlov podmienkou

$$\alpha = \beta \quad \vee \quad \gamma = 90° \quad \vee \quad \sin\gamma = 2\sin\alpha \quad \vee \quad \sin\gamma = 2\sin\beta.$$

Poznámka. Kľúčový poznatok, že pri polohe bodu X na polpriamke CA z rovnosti $|\angle XYC| = \alpha$ vyplýva $\alpha = \beta$ alebo $\gamma = 90°$, možno odvodiť mnohými inými spôsobmi. Načrtneme niekoľko takých riešení, pričom už nebudeme uvádzať zvyšnú časť postupu, len dokážeme uvedenú implikáciu a niekedy preskočíme detaily.

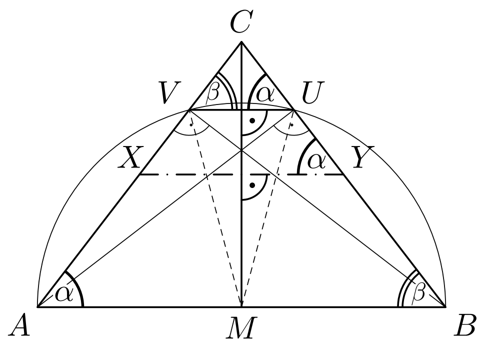
Iné riešenie. Zostrojme kolmicu t na ťažnicu CM vedenú bodom C. Tá je rovnobežná s osou XY danej ťažnice, takže tiež zviera so stranou BC uhol veľkosti α (obr. 7).



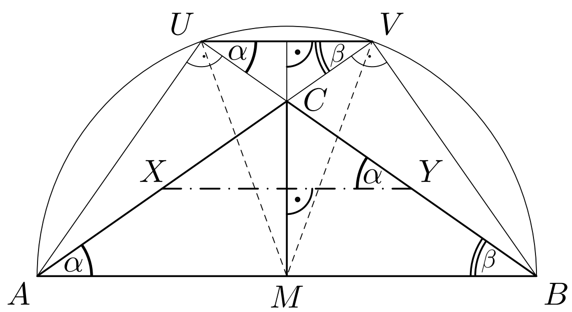
Obr. 7

Z vlastností obvodových a úsekových uhlov vyplýva, že t je dotyčnicou kružnice k opísanej trojuholníku ABC. Ťažnica CM, keďže je kolmicou na dotyčnicu t, prechádza stredom kružnice k. Ten však zároveň leží na osi strany AB. Môžu nastať dva prípady: buď je priamka CM totožná s osou strany AB, odkiaľ zrejme vyplýva $\alpha = \beta$, alebo je stred kružnice k prienikom priamky CM s osou strany AB, teda bodom M, z čoho máme $\gamma = 90°$.

Iné riešenie. Predpokladajme, že $\gamma \neq 90°$ a zostrojme päty výšok z vrcholov A, B, ktoré označíme postupne U, V. Tieto päty ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom AB a z tetivového štvoruholníka $ABUV$ (ak $\gamma < 90°$), resp. $ABVU$ (ak $\gamma > 90°$) dostaneme $|\angle VUC| = \alpha$ a $|\angle UVC| = \beta$ (obr. 8a, resp. 8b). Takže priamka UV je rovnobežná s XY, t. j. je kolmá na ťažnicu CM. Avšak $|MV| = |MU|$ (lebo M je stred Tálesovej kružnice nad priemerom AB), teda trojuholník UVM je rovnoramenný so základňou UV a priamka CM, na ktorej leží jeho výška, je zároveň osou základne UV. Preto $|CU| = |CV|$ a odtiaľ $\alpha = \beta$.



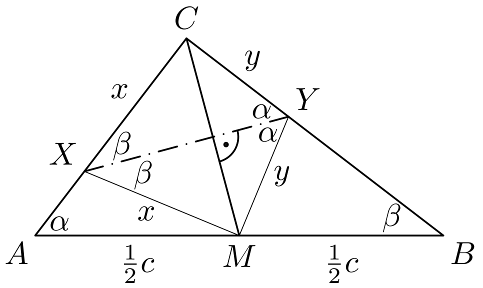
Obr. 8a



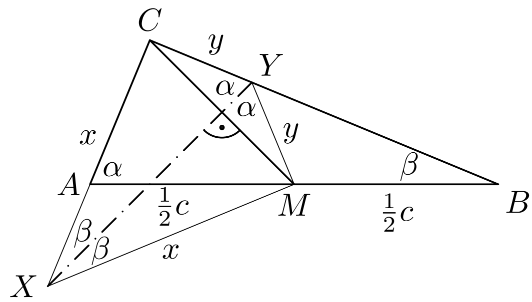
Obr. 8b

Iné riešenie. Označme $|CX| = |MX| = x$ a $|CY| = |MY| = y$. Ak X leží vnútri strany AC (obr. 9a), je $|\angle AXM| = 180° - 2\beta$ a zo sínusovej vety v trojuholníku AMX

máme
$$\frac{\frac12 c}{\sin(180^\circ-2\beta)}=\frac{x}{\sin\alpha},\qquad \text{odkiaľ}\qquad x=\frac{c\sin\alpha}{2\sin 2\beta}.$$
To isté vyjadrenie získame aj v prípade, že X leží na polpriamke opačnej k AC (obr. 9b) – vtedy má trojuholník AMX pri vrcholoch A a X uhly s veľkosťami $180^\circ-\alpha$ a 2β. Analogicky odvodíme $y=c\sin\beta/2\sin 2\alpha$.



Obr. 9a



Obr. 9b

Z mocnosti bodu C ku kružnici, na ktorej ležia body A, B, X, Y, máme $x\cdot b=y\cdot a$. Dosadením odvodených vyjadrení dostávame
$$\frac{bc\sin\alpha}{2\sin 2\beta}=\frac{ac\sin\beta}{2\sin 2\alpha},\qquad \text{odkiaľ}\qquad \sin 2\alpha=\sin 2\beta.$$
(Využili sme vzťah $a\sin\beta=b\sin\alpha$, ktorý vyplýva zo sínusovej vety.) Teda $2\alpha=2\beta$ alebo $2\alpha+2\beta=180^\circ$. V prvom prípade je $\alpha=\beta$, v druhom $\gamma=90^\circ$.

---

4. *V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc*
$$\begin{aligned} a(b^2+c)&=c(c+ab),\\ b(c^2+a)&=a(a+bc),\\ c(a^2+b)&=b(b+ca).\end{aligned}$$

(*Michal Rolínek*)

Riešenie. Každú rovnicu upravíme tak, aby členy tretieho stupňa boli naľavo a členy druhého stupňa napravo. Po vyňatí spoločných činiteľov pred zátvorku dostaneme ekvivalentnú sústavu
$$\begin{aligned} ab(b-c)&=c(c-a),\\ bc(c-a)&=a(a-b),\\ ca(a-b)&=b(b-c).\end{aligned}\tag{1}$$
Ak dve neznáme majú rovnakú hodnotu, napr. $a=b$, tak z tretej rovnice buď aj $b=c$, alebo $a=b=0$ a potom z prvej rovnice aj $c=0$. V oboch prípadoch je $a=b=c$. To isté analogicky dostaneme, ak bude rovnaká iná dvojica neznámych. Dosadením ľahko overíme, že trojica (t,t,t) je riešením pre každé $t\in\mathbb{R}$.

Ak je niektorá z premenných nulová, napr. $a=0$, tak z prvej rovnice $c=0$ a následne z tretej rovnice aj $b=0$. Podobne sú všetky tri premenné nulové aj ak $b=0$

alebo ak $c = 0$. Trojica $(0, 0, 0)$ je pritom zahrnutá už medzi riešeniami v predošlom odseku.

Predpokladajme ďalej, že trojica (a, b, c) je riešením, pričom žiadne dve premenné nie sú rovnaké a žiadna premenná nie je nulová, t. j. všetky činitele vo všetkých rovniciach v (1) sú nenulové. Po vzájomnom vynásobení týchto rovníc a vydelení spoločných činiteľov máme $abc = 1$, z čoho po vynásobení jednotlivých rovníc v (1) postupne členmi c, a, b dostávame rovnice

$$\begin{aligned} b - c &= c^2(c - a), \\ c - a &= a^2(a - b), \\ a - b &= b^2(b - c). \end{aligned}$$

Činitele a^2, b^2, c^2 sú kladné, preto výrazy $a - b$, $b - c$, $c - a$ majú všetky tri rovnaké znamienko. To však nie je možné, keďže ich súčet je nulový. Žiadne ďalšie riešenie teda neexistuje a jediné riešenia sú trojice (t, t, t), $t \in \mathbb{R}$.

Iné riešenie. Predpokladajme, že trojica (a, b, c) je riešením sústavy. Ak $a = 0$, tak z prvej rovnice aj $c = 0$ a potom z tretej rovnice $b = 0$. Podobne dostávame, že ak je ktorákoľvek z premenných nulová, sú nulové všetky. Trojica $(0, 0, 0)$ je naozaj riešením. Ďalej budeme predpokladať, že všetky tri premenné sú nenulové.

Vynásobme prvú rovnicu sústavy premennou b a pripočítajme k nej druhú rovnicu. Úpravami (odčítaním rovnakých členov na oboch stranách a vydelením nenulovou premennou a) dostaneme

$$\begin{aligned} ab(b^2 + c) + b(c^2 + a) &= bc(c + ab) + a(a + bc), \\ ab^3 + ab &= ab^2c + a^2, \\ b^3 + b &= b^2c + a. \end{aligned} \tag{2}$$

Vzhľadom na to, že cyklickou zámenou premenných sa rovnice pôvodnej sústavy nezmenia, platia tiež rovnosti, ktoré dostaneme cyklickou zámenou premenných v rovnosti (2), čiže

$$c^3 + c = c^2a + b, \tag{3}$$

$$a^3 + a = a^2b + c. \tag{4}$$

Z rovností (2), (3), (4) vyplýva, že všetky tri premenné a, b, c majú rovnaké znamienko. Naozaj, ak sú napr. obe premenné a, b kladné, tak pravá strana v (3) je kladná, teda aj ľavá strana musí byť kladná, čo je možné len pre $c > 0$. Z rovnakej úvahy vyplýva, že ak a a b sú záporné, tak aj $c < 0$. Analogicky dostaneme, že ak ktorékoľvek dve premenné majú zhodné znamienko, má také isté znamienko aj tretia premenná.

Ľahko možno nahliadnuť, že ak trojica (a, b, c) spĺňa rovnosti (2), (3), (4), spĺňa ich aj trojica $(-a, -b, -c)$. Stačí teda uvažovať len prípad, že všetky premenné sú kladné. Sčítaním rovností (2), (3), (4) dostaneme

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^2b + b^2c + c^2a. \tag{5}$$

Podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom trojice kladných čísel platí

$$\frac{a^3 + a^3 + b^3}{3} \geqq a^2b, \qquad \frac{b^3 + b^3 + c^3}{3} \geqq b^2c, \qquad \frac{c^3 + c^3 + a^3}{3} \geqq c^2a.$$

Sčítaním týchto nerovností dostávame $a^3+b^3+c^3 \geqq a^2b+b^2c+c^2a$, pričom rovnosť tu, a teda aj v (5), platí len vtedy, ak platí vo všetkých troch AG-nerovnostiach vyššie, t. j. keď $a=b=c$. Tým sme dokázali, že riešením sústavy môže byť len trojica zhodných čísel. Skúškou ľahko overíme, že každá taká trojica naozaj vyhovuje.

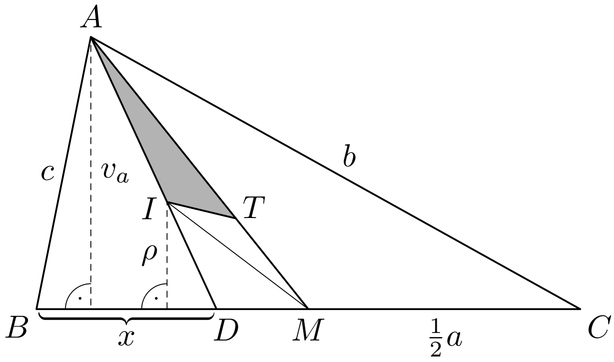
---

5. *Daný je trojuholník ABC, ktorého každé dve strany sa líšia aspoň o dĺžku $d>0$. Označme T jeho ťažisko, I stred kružnice vpísanej a ϱ jej polomer. Dokážte, že*

$$S_{AIT}+S_{BIT}+S_{CIT} \geqq \frac{2}{3}d\varrho,$$

pričom S_{XYZ} označuje obsah trojuholníka XYZ. (Michal Rolínek)

Riešenie. Strany trojuholníka budeme označovať štandardne a, b, c; budeme tiež používať označenie v_a pre veľkosť výšky trojuholníka na stranu a. Nech M je stred strany BC a D priesečník strany BC s osou uhla BAC. Trojuholníky AIT a AIM



Obr. 10

majú spoločnú výšku vedenú z vrcholu I a keďže ťažisko T leží v dvoch tretinách ťažnice AM, je $S_{AIT}=\frac{2}{3}S_{AIM}$. Obsah trojuholníka AIM vyjadríme ako rozdiel obsahov trojuholníkov DMA a DMI, ktoré majú spoločnú stranu DM a ich výšky na túto stranu majú veľkosti v_a, resp. ϱ (obr. 10). Máme teda

$$S_{AIM}=S_{DMA}-S_{DMI}=\frac{|DM|\cdot v_a}{2}-\frac{|DM|\cdot\varrho}{2}=\frac{1}{2}|DM|\cdot(v_a-\varrho).$$

Podľa známych vzorcov je

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}a\cdot v_a=\frac{1}{2}(a+b+c)\varrho, \qquad \text{odkiaľ} \qquad v_a=\frac{(a+b+c)}{a}\varrho=\varrho+\frac{b+c}{a}\varrho.$$

Spojením doposiaľ odvodených vzťahov dostávame

$$S_{AIT}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}|DM|\cdot(v_a-\varrho)=\frac{1}{3}|DM|\cdot\frac{b+c}{a}\varrho. \tag{1}$$

Dĺžku $|DM|$ vyjadríme ako kladný rozdiel dĺžky $|BM|=\frac{1}{2}a$ a dĺžky $|BD|$, ktorú označme x. Vieme, že os uhla trojuholníka delí protiľahlú stranu v pomere priľahlých strán. Preto $x:(a-x)=c:b$, odkiaľ vyjadríme x:

$$\begin{aligned} xb &= c(a-x),\\ x(b+c) &= ac,\\ x &= \frac{ac}{b+c}. \end{aligned}$$

Takže

$$|DM| = |\tfrac{1}{2}a - x| = \left|\tfrac{1}{2}a - \frac{ac}{b+c}\right| = \left|\frac{a(b+c)-2ac}{2(b+c)}\right| = \left|\frac{a(b-c)}{2(b+c)}\right| = \frac{a|b-c|}{2(b+c)}.$$

Dosadením do (1) napokon

$$S_{AIT} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a|b-c|}{2(b+c)}\cdot\frac{b+c}{a}\varrho = \frac{1}{6}|b-c|\varrho.$$

Analogicky odvodíme

$$S_{BIT} = \frac{1}{6}|c-a|\varrho, \qquad S_{CIT} = \frac{1}{6}|a-b|\varrho.$$

Podľa zadania je každá z hodnôt $|a-b|$, $|b-c|$, $|c-a|$ aspoň d. Pritom zrejme najväčšia z týchto troch hodnôt je rovná súčtu zvyšných dvoch, t. j. má veľkosť aspoň $2d$. Platí preto

$$S_{AIT} + S_{BIT} + S_{CIT} = \frac{1}{6}(|b-c| + |c-a| + |a-b|)\varrho \geqq \frac{1}{6}\cdot 4d\cdot\varrho = \frac{2}{3}d\varrho,$$

čo bolo treba dokázať.

---

6. *Dané je prirodzené číslo $n > 2$. Určte najväčšie celé číslo d, pre ktoré platí nasledujúce tvrdenie: Z ľubovoľnej n-prvkovej množiny celých čísel možno vybrať tri rôzne neprázdne podmnožiny tak, že súčet prvkov každej z nich je celočíselným násobkom čísla d. (Vybrané podmnožiny môžu mať spoločné prvky.)* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Dané tvrdenie neplatí pre žiadne $d \geqq n$: stačí uvážiť n-prvkovú množinu zostavenú z celých čísel, ktoré po delení číslom d dávajú zvyšok 1. Potom súčet prvkov každej neprázdnej podmnožiny bude dávať po delení d zvyšok rovný počtu prvkov danej podmnožiny, teda nebude násobkom d (s výnimkou prípadu, keď $d = n$ a za podmnožinu zoberieme celú n-prvkovú množinu – vtedy je však toto jediná „vyhovujúca“ podmnožina).

V druhej časti riešenia ukážeme, že tvrdenie platí pre $d = n - 1$. V ďalšom výklade všetky uvažované množiny budú neprázdne, ich prvky budú celé čísla a $s(X)$ bude označovať súčet všetkých prvkov danej množiny X.

Najskôr dokážeme (známe) tvrdenie, že ak má X aspoň d prvkov, tak existuje $Y \subseteq X$ s vlastnosťou $d \mid s(Y)$. Naozaj, ak vyberieme d rôznych prvkov $x_1, \dots, x_d \in X$, tak v prípade, že žiadny z d súčtov

$$x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \ldots + x_d$$

nie je násobkom d, dva z nich, povedzme $x_1 + x_2 + \ldots + x_i$ a $x_1 + x_2 + \ldots + x_j$, dávajú po delení číslom d rovnaký zvyšok. Ich rozdiel je potom násobkom čísla d a zároveň je súčtom $s(Y)$ pre vyhovujúcu podmnožinu $Y = \{x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_j\}$.

Vrátime sa k dôkazu tvrdenia zo zadania úlohy pre $d = n - 1$. Nech teda X je ľubovoľná množina majúca n prvkov. Podľa dokázaného poznatku nájdeme množinu

$X_1 \subseteq X$ takú, že $n-1 \mid s(X_1)$. Zvoľme nejaké $x_1 \in X_1$ a pre $(n-1)$-prvkovú množinu $X' = X \setminus \{x_1\}$ znova uplatnime poznatok: existuje množina $X_2 \subseteq X'$ taká, že $n-1 \mid s(X_2)$. Keďže $x_1 \in X_1$ a $x_1 \notin X_2$, máme už vybrané dve rôzne podmnožiny X požadovanej vlastnosti. Tretiu podmnožinu $X_3 \subseteq X$ spĺňajúcu $n-1 \mid s(X_3)$ teraz nájdeme takto: v prípade $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ zvolíme $X_3 = X_1 \cup X_2$; v opačnom prípade, keď $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, zvolíme $x_2 \in X_1 \cap X_2$ a ešte tretíkrát uplatníme rovnaký poznatok, tentoraz na $(n-1)$-prvkovú množinu $X'' = X \setminus \{x_2\}$, a nájdeme tak hľadané $X_3 \subseteq X''$.

Odpoveď. Hľadané najväčšie d je rovné $n-1$.

Poznámka. Pre hodnotu $d = n-1$ sa môže stať, že požadovanú vlastnosť budú mať práve tri (rôzne) podmnožiny n-prvkovej množiny X. Nastane to, keď čísla z n-prvkovej množiny X budú po delení číslom $n-1$ dávať zvyšky $1, 1, 1, \ldots, 1, 0$. Jedna vyhovujúca množina bude mať 1 prvok, druhá $n-1$ prvkov a tretia (všetkých) n prvkov.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015